

Análise de confiabilidade de uma viga em concreto armado considerando modelos não lineares de materiais e a influência de múltiplos modos de falha na avaliação da segurança global

Reliability analysis of a reinforced concrete beam considering nonlinear material models and the influence of multiple failure modes on the global safety assessment

Caio Gorla Nogueira¹
Bruno Daniel Leite Rodrigues²

Resumo: A previsão adequada da segurança estrutural é atualmente uma tarefa cada vez mais demandada em projetos de novas estruturas. Assim, este trabalho tem como objetivo apresentar uma abordagem alternativa, denominada de Técnica dos Múltiplos Modos de Falha, para a previsão da segurança de vigas em concreto armado, a partir da consideração da influência de mais de um modo de falha. As vigas são modeladas numericamente com o auxílio de um programa computacional baseado no Método dos Elementos Finitos associado a modelos não lineares de dano e plasticidade para o concreto e aço, respectivamente. Os resultados obtidos com a aplicação da técnica foram comparados aos resultados da abordagem padrão – denominada Modo Mais Provável de falha – para uma viga isostática com falha no concreto comprimido e aço da armadura longitudinal tracionada. Observou-se que a influência do modo secundário de falha foi significativa na quantificação da probabilidade de falha global da viga, mostrando a importância dos múltiplos modos de falha na previsão da segurança em estruturas de concreto armado.

Palavras-Chave: Confiabilidade; Concreto armado; Elementos finitos; Múltiplos modos de falha.

Abstract: The adequate structural safety prediction is nowadays an increasing demanding task in new structural designs. Thus, the main objective of this work is to present an alternative approach, called Multiple Failure Modes technique, for safety prediction of reinforced concrete (RC) beams considering the influence of more than one failure mode. The RC beams are numerically modeled with the aid of a computational program based on Finite Element Method associated to nonlinear damage and plasticity models for concrete and steel, respectively. The obtained results with the application of the technique were compared to the results of the standard approach – called Most Probable Failure mode – for a statically determinate RC beam with failure in compressive concrete and longitudinal tension reinforcement steel. It was observed that the influence of the secondary failure mode was significant to quantify the overall probability of failure of the beam, showing the importance of multiple failure modes in safety prediction of RC structures.

Keywords: Reliability; Reinforced concrete; Finite elements; Multiple failure modes.

1: Professor Doutor, Departamento de Engenharia
Faculdade de Engenharia – Bauru - Universidade Estadual Paulista (UNESP)
E-mail: cgnoseira@feb.unesp.br

2: Graduação, Engenharia
Faculdade de Engenharia – Bauru - Universidade Estadual Paulista (UNESP)
E-mail: bruno.engenhariacivil2015@gmail.com

Recebido: xx --- 20xx • Aceito: xx --- 20xx • Disponível Online: xx --- 20xx

1 INTRODUÇÃO

A análise da segurança de sistemas estruturais na engenharia civil é um requisito essencial quando se concebe uma obra. Atualmente, os códigos de projeto utilizam uma abordagem semi-probabilística para a verificação da segurança dos elementos estruturais, que consiste em garantir, mediante um conjunto de regras, que a resistência seja sempre maior ou, no limite, igual à solicitação. Dentro desse contexto, entretanto, não existe o conhecimento sistemático do nível de segurança obtido para o sistema estrutural projetado ou para seus elementos isolados, uma vez que esse tipo de abordagem não permite avaliar probabilidades de ocorrência de falhas (MOHAMED et al., 2001). Como forma de melhorar a previsão da segurança de sistemas estruturais na engenharia, a Teoria da Confiabilidade vem sendo utilizada com o objetivo de considerar de forma mais consistente as incertezas inerentes aos parâmetros de projeto e, com isso, avaliar probabilidades de ocorrência de cenários de interesse. No âmbito da engenharia estrutural, esses cenários de interesse são representados por falhas específicas dos elementos estruturais que podem ou não conduzir todo o sistema estrutural ao colapso. FREUDENTHAL (1947) foi um dos pioneiros a tratar o problema da segurança estrutural de forma probabilística e continua sendo referência importante na área da confiabilidade. HASOFER e LIND (1974) introduziram o conceito do índice de confiabilidade invariante como medida do nível de segurança e que se relaciona diretamente com a probabilidade de falha. RACKWITZ e FIESSLER (1978) propuseram um algoritmo de otimização sistemático para a avaliação do índice de confiabilidade, que depende das derivadas da função de estado limite para a busca da solução (esse algoritmo foi utilizado nesse trabalho). Diversos outros trabalhos foram propostos para a disseminação da cultura da confiabilidade na engenharia estrutural como técnica de avaliação e previsão da segurança com a utilização de métodos aproximados e de simulação para a obtenção das probabilidades de falha (BUCHER e BOURGUND, 1990; ENEVOLDSEN et al., 1994; GUAN e MELCHERS, 2001; ROOS e BUCHER, 2003; WONG et al. 2005).

No entanto, a maioria dos trabalhos desenvolvidos considerou que a falha da estrutura está associada somente ao elo mais fraco do sistema, isto é, quando esse elemento falha, todo o sistema entra em colapso. Estruturas em concreto armado podem apresentar alto grau de redundância (hiperestaticidade), de forma que ao

se atingir a falha numa determinada seção transversal do sistema, não há necessariamente falha ou colapso de toda a estrutura. Nesses casos, em função da reserva de resistência acumulada na estrutura proveniente dos graus de hiperestaticidade, após a ocorrência de uma falha localizada, pode haver a redistribuição de esforços e, com isso, o sistema ainda é capaz de absorver as ações e permanecer equilibrado e seguro. A solução desse problema requer, portanto, a consideração de uma abordagem via confiabilidade de sistemas, que considera a contribuição de mais de um modo de falha para que ocorra o colapso de toda a estrutura. DITLEVSEN e BJERAGER (1984) analisaram a confiabilidade de sistemas estruturais com elevada redundância e propuseram a determinação de limites inferiores e superiores para o valor da probabilidade de falha de todo o sistema. NEVES et al. (2008) acoplaram um modelo mecânico baseado no MEF (Método dos Elementos Finitos) ao FORM (Método de Confiabilidade de Primeira Ordem), MSR (Método de Superfícies de Respostas) e ao modelo de simulação de Monte Carlo para obter as probabilidades de falha de modos secundários em grelhas de concreto armado e considerar sua influência na avaliação global da probabilidade de falha do sistema. Essa abordagem, entretanto, contribui para a melhoria da estimativa da probabilidade de falha do primeiro modo ou modo mais provável, pois considera a influência dos demais modos importantes em sua avaliação.

Este trabalho propõe uma técnica semelhante à utilizada por Neves et al. (2008) para avaliação de probabilidades de falha em sistemas, porém permite ainda a determinação da probabilidade do colapso estrutural, a partir da determinação das probabilidades individuais dos modos mais importantes da estrutura. Foi desenvolvido um modelo numérico baseado no MEF associado ao FORM para a determinação dos índices de confiabilidade dos modos de falha individuais e, em seguida, a partir do MSR, as curvas de falha foram construídas para cada modo, obtendo-se um domínio de falha composto. Sobre esse domínio composto, as simulações de Monte Carlo são realizadas para a determinação das probabilidades de intersecção entre os modos e, com isso, a probabilidade de falha global do sistema.

2 MATERIAIS E MÉTODOS

2.1 O Modelo mecânico

O programa computacional utilizado para a realização das análises numéricas é baseado no MEF unidimensional, onde o elemento finito

adotado é um elemento de pórtico plano com dois nós (um cada extremidade do elemento) e três graus de liberdade por nó (sendo translações na horizontal – X e vertical – Y e uma rotação em torno do eixo Z). Na montagem da matriz de rigidez do elemento, foram consideradas as teorias técnicas de Euler-Bernoulli e Timoshenko, sendo que a diferença entre ambas se dá pela consideração da influência das deformações de cisalhamento nesta última, tornando-a mais precisa que a teoria de Euler-Bernoulli.

Os materiais aço e concreto foram tratados considerando seu comportamento não linear através de um modelo elastoplástico com encruamento linear isotrópico positivo para o aço e o modelo de dano escalar isotrópico de MAZARS (1984) no caso do concreto. Dessa forma, a obtenção de cargas últimas ou cargas de violação de estados limites foi possível, pois o modelo mecânico foi capaz de considerar a perda de rigidez do concreto em função do aumento da danificação e da plastificação do aço das armaduras na proximidade da ruptura estrutural.

O modelo de dano de Mazars depende de parâmetros internos (AT, BT, AC e BC) para obter o estado de danificação num ponto qualquer do elemento estrutural, à medida que a fissuração do concreto evolui. Esses parâmetros essencialmente devem ser obtidos a partir de um processo de calibração com resultados experimentais em corpos de prova de concreto à tração e compressão simples, a partir dos diagramas tensão-deformação. Com isso, para um determinado nível de resistência à compressão do concreto, esses parâmetros são calibrados, permitindo, assim, que o modelo numérico de dano seja capaz de representar adequadamente o comportamento estrutural. Porém, a obtenção generalizada de resultados experimentais de ensaios à compressão e tração para diferentes classes de resistência do concreto torna o procedimento inviável, em função da necessidade de diversos ensaios. Para contornar esse limitante, o modelo mecânico utiliza um processo de calibração não linear com base no Método dos Mínimos Quadrados, que utiliza como resposta do material, diagramas tensão-deformação teóricos. Para isso, as leis constitutivas teóricas utilizadas foram: lei proposta por POPOVICS (1973) para o concreto à compressão; leis propostas por FIGUEIRAS (1983), COLLINS e VECHIO (1986), NOGUEIRA (2012) para o concreto à tração. Os detalhes da formulação do modelo mecânico, bem como diversos testes para sua validação podem ser encontrados nos trabalhos de NOGUEIRA (2010 e 2012) e NOGUEIRA et al. (2013).

2.2 O Modelo de confiabilidade

A consideração da influência dos modos de falha secundários do sistema foi introduzida seguindo as etapas descritas abaixo e ilustrado na Figura 1.

- A) Acoplamento do MEF não linear com o FORM: a carga última que a estrutura suporta referente ao modo de falha considerado é obtida impondo-se que a máxima deformação no concreto comprimido ou na armadura tracionada não ultrapasse o limite de -3,5‰ ou 10‰, respectivamente, ao longo do processo de carregamento. Assim, para cada modo de falha, o FORM utiliza as cargas últimas calculadas pelo MEF e fornece o índice de confiabilidade β e a probabilidade de falha através da relação $P_f = \Phi(-\beta)$, onde Φ é a distribuição acumulada de probabilidades no espaço normal-padrão;
- B) Após a determinação do índice de confiabilidade de cada modo de falha, centra-se um plano de experiência (SOARES 2001) determinístico nas coordenadas do ponto de projeto de cada modo. A partir disso, são realizadas novas análises mecânicas via MEF para a construção da curva de falha de cada modo. As funções G_i utilizadas para a construção das curvas são polinômios de segundo grau com termos cruzados nas variáveis aleatórias x_i consideradas para a análise de confiabilidade, conforme:

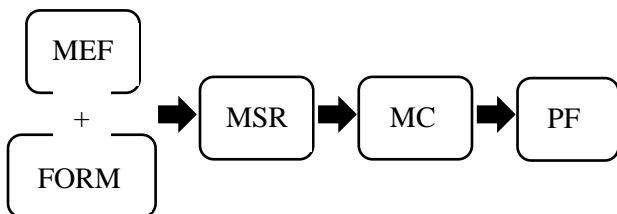
$$G_i = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_1^2 + a_4x_2^2 + a_5x_1x_2 \quad (1)$$

- C) Com o conhecimento analítico das funções que definem a curva de falha de cada modo importante, simulações de Monte Carlo (MC) são realizadas para a determinação de probabilidades de intersecção entre os modos e/ou união entre eles;
- D) Finalmente, a avaliação final da probabilidade de falha do sistema se dá através da combinação entre as probabilidades dos modos individuais obtidas na etapa anterior.

É importante destacar que após a construção das curvas de cada modo de falha, as simulações de Monte Carlo são todas realizadas sobre os polinômios e não mais sobre o modelo do MEF. Com isso, é possível a realização de milhares de simulação, com custo computacional em termos de tempo de processamento quase que

insignificante. Em função do tipo de estrutura analisada, cada chamada do modelo mecânico do MEF pode demorar minutos para a obtenção da carga última, inviabilizando o uso direto da simulação de Monte Carlo. Porém, com essa abordagem, esse problema é contornado graças à execução das simulações sobre os polinômios já obtidos e não mais sobre o MEF.

Figura 1 – Esquema do modelo de confiabilidade e suas etapas.



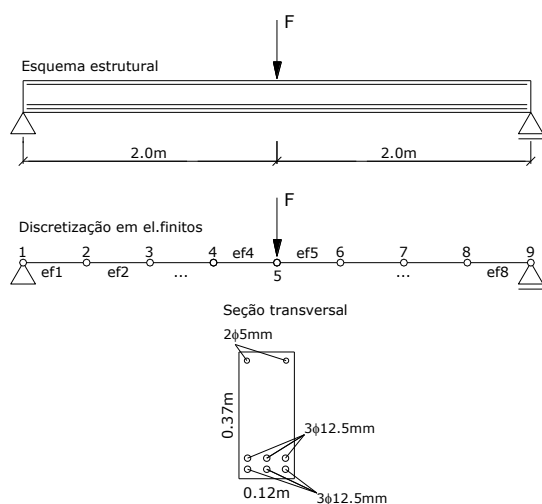
Fonte: próprios autores.

3 ANÁLISE DOS RESULTADOS

3.1 Viga isostática com 2 modos de falha

O objetivo desta análise é mostrar a influência da consideração de dois modos de falha na avaliação final da probabilidade de colapso de uma viga isostática em concreto armado, comparada à técnica convencional do modo mais provável. A viga pode ser tratada como um sistema em série do ponto de vista da teoria de confiabilidade, pois a falha do aço tracionado ou do concreto comprimido representa a falha global da estrutura. A Figura 2 ilustra a viga analisada, bem como a malha utilizada em elementos finitos.

Figura 2 – Viga em concreto armado analisada.



Fonte: próprios autores.

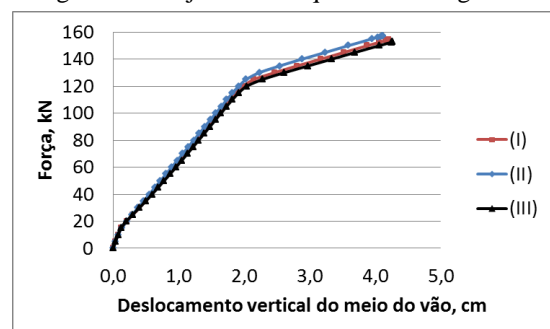
Os parâmetros utilizados na análise foram: força atuante $F = 140$ kN; módulo de elasticidade do aço de 210 GPa; módulo plástico do aço de 21

GPa; procedimento incremental-iterativo para busca da carga última com aplicação de incrementos iguais de força de 2 kN; deformações limites para o concreto comprimido de $-3,5\%$ e 10% para o aço tracionado. As resistências do concreto à compressão e do aço foram consideradas aleatórias com média de 30 MPa e 550 MPa, respectivamente e coeficiente de variação de 15% e 8%, respectivamente. Ambas as variáveis aleatórias foram representadas por distribuições lognormais de probabilidades.

Para avaliar a influência dos parâmetros do modelo de dano nas análises de confiabilidade, as probabilidades de falha foram obtidas considerando-se as respostas mecânicas produzidas por três conjuntos de parâmetros de dano à tração, calibrados em função das leis constitutivas de Figueiras (I), Collins e Vecchio (II) e ainda Nogueira (III). Os parâmetros de compressão foram calibrados pelo modelo de Popovics.

Inicialmente foi realizada uma análise puramente mecânica via elementos finitos, considerando as variáveis aleatórias em seu valor médio, com o objetivo de determinar o fator de carga (f), dado pela razão entre carga última (F_u) obtida e carga aplicada (140 kN). A Figura 3 mostra as trajetórias de equilíbrio da viga para cada análise numérica.

Figura 3 – Trajetória de equilíbrio da viga.



Conforme pode ser observado, a influência dos parâmetros de dano na resposta estrutural no caso analisado não é muito significativa, especialmente ao se comparar o comportamento em serviço da viga antes do escoamento da armadura longitudinal. No entanto, em termos de carga última nota-se uma diferença pouco mais significativa. Os resultados obtidos foram: (I) $F_u = 154$ kN e $f = 1,10$; (II) $F_u = 157$ kN e $f = 1,12$; (III) $F_u = 152$ kN e $f = 1,09$. A viga mostrou-se mais resistente com o modelo (II) porque a lei constitutiva de Collins e Vecchio considera maior contribuição do concreto à tração no trecho pós-pico do diagrama tensão-deformação.

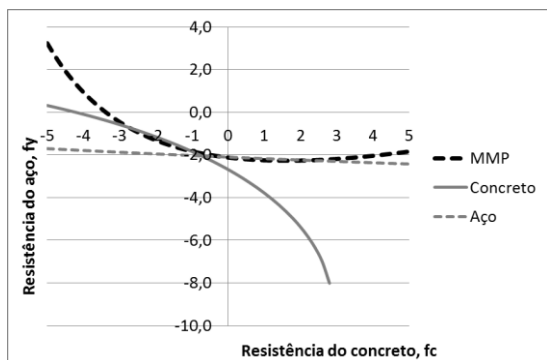
Para a determinação da probabilidade de falha da viga, duas abordagens foram realizadas:

(MMP) modo mais provável de falha e (MMF) múltiplos modos de falha. Na primeira, a estrutura é carregada até que a falha seja definida com a violação de uma das condições em deformação dos materiais. Nesse caso, quando isso ocorre, admite-se que houve a formação de uma rótula plástica e com isso a viga sofre colapso. Já na segunda abordagem, a avaliação mais precisa da probabilidade de falha global da viga é feita a partir da consideração do evento união entre falha no concreto (C) e no aço (A), conforme:

$$P_f = P(C \cup A) = P(C) + P(A) - P(C \cap A) \quad (2)$$

Dessa forma, as probabilidades individuais de falha no aço e no concreto são obtidas via acoplamento MEF + FORM, fixando-se a falha em cada um dos materiais de forma independente. Após a obtenção das probabilidades de falha, o MSR é utilizado para construir uma superfície de resposta com plano de experiência centrado no ponto de projeto de cada modo de falha. A Figura 4 ilustra as curvas obtidas para o MMP e os modos individuais aço e concreto no espaço normal-padrão adimensional para o conjunto de parâmetros do modelo de dano obtido com a lei de Figueiras à tração.

Figura 4 – Curvas dos modos de falha individuais e do MMP.



A curva obtida via MMP desempenha o papel de envoltória dos modos individuais mais importantes que influenciam na falha global da estrutura. Em função do par de resistências aço e concreto, a falha pode ocorrer ou na armadura longitudinal tracionada ou no concreto comprimido, evidenciando a importância desse tipo de análise. A Figura 5 apresenta novamente as curvas dos modos de falha, porém salienta o limite de resistência do domínio composto de segurança constituído pelas partes importantes de cada curva.

A seguir, são apresentadas as probabilidades de falha e os índices de confiabilidade obtidos individuais (C e A) para os modos, do modo mais provável (MMP) e da intersecção $P(C \cap A)$ para

cada conjunto de parâmetros do modelo de dano. Todas as probabilidades (P_f) são multiplicadas por 10^{-3} .

Figura 5 – Curva que delimita o domínio composto de segurança global.

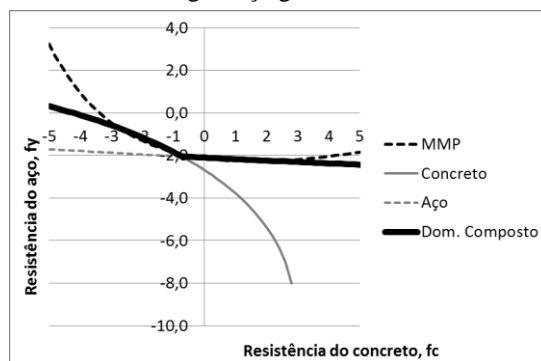


Tabela 1 – Probabilidades de falha e índices de confiabilidade obtidos.

		MMP	C	A	$C \cap A$
I	P_f	18,10	18,97	18,11	12,82
	β	2,09	2,07	2,09	2,23
II	P_f	5,67	5,67	3,17	1,45
	β	2,53	2,53	2,73	2,97
III	P_f	41,55	34,31	41,61	18,50
	β	1,73	1,82	1,73	2,09

Nos casos I e III, o índice de confiabilidade obtido pelo MMP resultou igual ao da armadura longitudinal (A) indicando que a falha no aço corresponde à falha mais provável. Apenas no caso II, onde o modelo constitutivo utilizado para a calibração dos parâmetros de dano foi o Collins e Vecchio, a falha principal foi observada no concreto comprimido. Outro aspecto importante consiste na diferença em termos dos índices de confiabilidade obtidos para cada conjunto de parâmetros do modelo de dano. Isso mostra a importância de se calibrar adequadamente esses parâmetros para que a previsão da segurança seja factível.

A probabilidade de falha global da viga para cada caso foi obtida pela Equação 2 e comparada com o respectivo valor calculado pela abordagem do MMP, conforme mostra a Tabela 2.

Os índices de confiabilidade correspondentes às probabilidades de falha globais dos casos I, II e III foram respectivamente: 1,97; 2,43 e 1,57.

Tabela 2 – Comparação entre as probabilidades de falha global e via MMP.

		MMP	Global
I	P_f	$1,81 \times 10^{-2}$	$2,43 \times 10^{-2}$
II	P_f	$5,67 \times 10^{-3}$	$7,38 \times 10^{-3}$
III	P_f	$4,15 \times 10^{-2}$	$5,74 \times 10^{-2}$

Em todos os casos, foram observadas alterações em relação aos índices de confiabilidade e às probabilidades de falha avaliadas por ambas as abordagens. Conforme esperado, a probabilidade global de falha avaliada via abordagem MMF resultou maior do que os valores obtidos pelo modo mais provável. Isso ocorreu porque houve contribuição do segundo modo na falha do primeiro modo, uma vez que a ordem de grandeza das probabilidades foi a mesma. Nessas situações, a abordagem dos múltiplos modos de falha pode fornecer maior precisão na estimativa da segurança de sistemas estruturais em concreto armado, quando comparado à abordagem tradicional MMP. As diferenças percentuais entre o cálculo da probabilidade de falha global via MMP e MMF para os casos I, II e III foram respectivamente: 34%; 30% e 38%, o que evidencia a importância da técnica. Porém, é evidente que se os modos de falha secundários não forem importantes em relação ao primeiro modo, sua contribuição pode ser desprezada e, nessas situações, a segurança fica bem estimada apenas com o conhecimento do modo mais provável.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo apresentou uma técnica alternativa para avaliação da probabilidade de falha global de uma viga isostática em concreto armado, a partir da análise de falha local referente a cada material. Nessa abordagem alternativa (MMF), a segurança global do sistema estrutural é obtida considerando-se as probabilidades de falha dos modos individuais no cálculo da probabilidade final. Isso foi obtido através do acoplamento do modelo mecânico via MEF com o FORM para a obtenção das probabilidades de falha individuais e, em seguida, com o MSR para a construção das curvas de falha e simulação de Monte Carlo para o cálculo das probabilidades das intersecções.

A técnica permitiu concluir que existe diferença na estimativa da probabilidade de falha global de sistemas estruturais quando os modos individuais são importantes, quando comparada à previsão tradicional do modo mais provável, que consiste numa envoltória dos modos principais de falha. As diferenças percentuais entre as probabilidades de falha globais foram superiores a 30% em todos os casos analisados.

Finalmente, a calibração dos parâmetros do modelo de dano de Mazars mostrou-se fundamental para que as respostas mecânicas sejam capazes de representar adequadamente o comportamento estrutural e deve, portanto, ser realizada com muito critério.

5 AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a UNESP – Faculdade de Engenharia - Bauru pela bolsa de IC concedida ao aluno.

6 FINANCIAMENTO

A pesquisa foi fruto de um projeto de Iniciação Científica com financiamento RT/Reitoria UNESP no período de 2015 a 2016.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- MOHAMED, A.; SOARES, R.; VENTURINI, W.S. Partial safety factors for homogeneous reliability of nonlinear reinforced concrete columns. *Structural Safety*, v.23, p. 137-156, 2001.
- FREUDENTHAL, A.M. The safety of structures. *Transactions of ASCE*, v. 112, p. 125-180, 1947.
- HASOFER, A.M.; LIND, N.C. Exact and invariant second moment code format. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, v. 100, n. EM1, February, p. 111-121, 1974.
- RACKWITZ, R.; FIESSLER, B. Structural reliability under combined random load sequences. *Computers & Structures*, v. 9, p. 489-494, 1978.
- BUCHER, C.G.; BOURGUND, U. A fast and efficient response surface approach for structural reliability problems. *Structural Safety*, 7(1), p. 57-66, 1990.
- ENEVOLDSEN, I.; FABER, M.H.; SØRENSEN, J.D. Adaptive response surface techniques in reliability estimation. *Structural Safety & Reliability*. In: Schueller, Shinozuka & Yao, Balkema, Rotterdam, p. 1257-1264, 1994.
- GUAN, X.L.; MELCHERS, R.E. Effect of response surface parameter variation on structural reliability estimates. *Structural Safety*, v. 23, n. 4, p. 429-444, 2001.
- ROOS, D.; BUCHER, C. Adaptive response surfaces for structural reliability of nonlinear finite element structures. *NAFEMS Seminar: Use of Stochastics in FEM Analysis*, May 7-8, Wiesbaden, Germany, 2003.
- WONG, S.M.; HOBBS, R.E.; ONOF, C. An adaptive response surface method for reliability analysis of structures with multiple loading sequences. *Structural Safety*, v. 27, p. 287-308, 2005.
- DITLEVSEN, O.; BJERAGER, P. Reliability of highly redundant plastic structures. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, v. 110, n. 5, May, p. 671-693, 1984.

- NEVES, R.A.; CHATEAUNEUF, A.M.; VENTURINI, W.S. Component and system reliability analysis of nonlinear reinforced concrete grids with multiple failure modes. *Structural Safety*, v. 30, p. 183-199, 2008.
- SOARES, R.C. Um estudo sobre modelos mecânico-probabilísticos para pórticos de concreto armado. Tese (Doutorado), Escola de Engenharia de São Carlos, USP, São Carlos, 2001.
- MAZARS, J. Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure. Thèse de Doctorat d'État, Université Paris 6, Paris, 1994.
- POPOVICS, S.A. numerical approach to the concrete stress-strain curve of concrete. *Cement and Concrete Research*, v. 3, p. 583-599, 1973.
- FIGUEIRAS, J.A. Ultimate load analysis of anisotropic and reinforced concrete plates and shells. Ph.D. Thesis, Department of Civil Engineering, University College of Swansea, 1983.
- COLLINS, M.P.; VECCHIO, F.J. The modified compression-field theory for reinforced concrete elements subjected to shear. *ACI Journal*, v. 83, n. 2, p. 219-231, 1986.
- NOGUEIRA, C.G. Desenvolvimento de modelos mecânicos, de confiabilidade e de otimização para aplicação em estruturas de concreto armado. Tese (Doutorado), Escola de Engenharia de São Carlos, USP, 2010.
- NOGUEIRA, C.G.; VENTURINI, W.S.; CODA, H.B. Material and geometric nonlinear analysis of reinforced concrete frame structures considering the influence of shear strength complementary mechanisms. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 10, p. 953-980, 2013.
- NOGUEIRA, C.G. Modelo mecânico para estruturas lineares em concreto armado – uma abordagem acoplada entre a mecânica do dano e algoritmos de otimização. *Engenharia Estudo e Pesquisa*, v. 12, n. 2, Santa Maria, pp. 14-27, Julho/Dezembro, 2012.