

Método de pontos interiores/exteriores para a solução do problema de Fluxo de Potência Ótimo Reativo Discreto Misto com funções penalidade

Interior/exterior point methods for solving the Optimal Power Flow Discrete Mixed with penalty functions

Marielena Fonseca Tófoli e Daisy Paes Silva ¹
Leonardo Nepomuceno ²

Resumo: O problema de Fluxo de Potência Ótimo Reativo (FPOR) é um caso particular do problema de Fluxo de Potência Ótimo clássico (FPO), e tem como objetivo calcular pontos de operação para um Sistema de Energia Elétrica (SEE) que otimizem algum critério associado à parte reativa de um sistema de transmissão/geração, levando em conta os limites físicos e operacionais do SEE. O problema de FPOR é formulado como um problema de otimização não linear, não convexo, com variáveis contínuas e discretas. Utiliza-se uma função penalidade polinomial da literatura para o tratamento das variáveis discretas, neste caso, os taps dos transformadores. As funções objetivos são adicionadas à função objetivo e o problema é resolvido pelo método de pontos interiores/exteriores. Neste trabalho, propõe-se uma estratégia de correção de inércia para garantir a otimalidade local do método. Testes numéricos com os sistemas IEEE 14, 30 e 57 barras apresentaram resultados satisfatórios.

Palavras-Chave: Fluxo de Potência Ótimo Reativo; Correção de Inércia; Métodos de Pontos Interiores/Exteriores; Programação Não Linear Discreto Misto.

Abstract: The Reactive Optimal Power Flow (FPOR) is a particular case of the Optimal Power Flow (FPO) problem, and objective to calculate operating points for a Electrical Power System (SEE) that optimize some criterion associated to the reactive part of a transmission/generation system, considering physical and operational constraints of a System. Mathematically, it is modeled as a nonlinear programming problem of large scale, non-convex and with continuous and discrete variables. In the literature, penalty functions has been used for handling the discrete variables of the Optimal Power Flow problem. Thus, this work explores two penalty functions sinusoidal and polynomial that deal with discrete variables, in this case, the transformer taps. These functions are added to the objective function and the penalty problem are solved by and interior and exterior point method. In this work, a strategy of correction of inertia is proposed to guarantee the local optimality of the method. Studies are made on the IEEE systems 14, 30 and 57 buses and show the efficiency of penalty functions and interior and exterior point methods for solving the reactive optimal power flow problem with discrete variables.

Keywords: Reactive Optimal Power Flow; Correction of Inertia; Interior and Exterior Point Methods; Discrete Mixed Nonlinear Programming.

1: Pós-graduação, Engenharia Elétrica
Faculdade de Engenharia – Bauru - Universidade Estadual Paulista (UNESP)
e-mail: tofoli.mf@gmail.com e daisy.silva@feb.unesp.br

2: Professor Doutor, Departamento de Engenharia
Faculdade de Engenharia – Bauru - Universidade Estadual Paulista (UNESP)
e-mail: leo@feb.unesp.br

1 INTRODUÇÃO

O problema de Fluxo de Potência Ótimo (FPO) tem como objetivo calcular pontos de operação para um Sistema de Energia Elétrica (SEE) que otimizem algum critério de um sistema de transmissão/geração, levando em conta os limites físicos e operacionais do SEE.

O problema de Fluxo de Potência Ótimo Reativo (FPOR) é um caso particular do Fluxo de Potência Ótimo clássico (FPO), onde a potência ativa é considerada fixa e as variáveis relacionadas à potência reativa são ajustadas de modo a otimizarem um critério desejado, normalmente relacionado à transmissão e/ou à geração. Neste trabalho, o critério de otimização é a minimização das perdas de potência no sistema.

O FPOR é formulado como um problema de otimização não linear, não convexo, de grande porte com variáveis contínuas e discretas. A representação das variáveis discretas no problema dificulta a sua resolução, motivo pelo qual muitas abordagens na literatura aproximam essas variáveis como valores contínuos. Quando os taps de transformadores e/ou os bancos de capacitores/reatores são representados por meio de variáveis discretas, o FPOR se torna um problema de Programação Não Linear Discreto Misto (PNLDM), aqui denominado FPOR-DM.

Dependendo da dimensão do problema, essa mescla de métodos pode se tornar computacionalmente inviável. A solução desse problema nem sempre é obtida por meio de pacotes computacionais comerciais, de modo que estratégias para o tratamento das variáveis discretas têm sido investigadas recentemente.

Funções penalidade têm sido investigadas, tais funções têm como objetivo penalizar as variáveis discretas que assumem valores não discretos pré-estabelecidos. Quando tais funções são minimizadas em conjunto com a função objetivo original do FPOR-DM, as variáveis discretas são iterativamente levadas a assumir valores de seu conjunto discreto pré-estabelecido na solução. Soler et al. (2013) propõem a primeira função penalidade senoidal especificamente pensada para o FPOR-DM. Na mesma linha de investigação, Silva (2016) propõe uma função penalidade do tipo polinomial que se aplica melhor a situações em que o conjunto discreto possui elementos não igualmente espaçados, bancos de capacitores/reatores. Os trabalhos (Soler et al., 2013) e (Silva, 2016) mostram que problemas de FPOR-DM, para sistemas IEEE de até 300 barras, são eficientemente resolvidos por abordagens baseadas em funções penalidade.

Entretanto, essas funções podem inserir não convexidades adicionais ao problema, o qual passa a possuir múltiplos mínimos e máximos locais. Nestes casos, métodos baseados na solução das condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) podem encontrar pontos estacionários quaisquer: mínimos, máximos ou sela. Assim, é necessário garantir que apenas os pontos de mínimo sejam obtidos para o FPOR-DM, caso contrário, soluções não discretas podem ser calculadas. Alguns pacotes computacionais (Wächter and Biegler, 2005) possuem estratégias internas, tais como: filtros, como utilizado por (Soler et al., 2013) e (Silva, 2016), região de confiança e correções de inércia, que buscam tornar o algoritmo mais robusto e evitar que este convirja para pontos de sela ou máximo.

Neste trabalho, investiga-se a solução do FPOR utilizando a função de penalidade com objetivo de tratar as variáveis discretas. Na metodologia proposta tais variáveis são tratadas por funções penalidade polinomial de Silva (2016) e o problema penalizado é resolvido por métodos de pontos interiores/exteriores. Neste trabalho, propõe-se um método que envolve uma estratégia de correção de inércia da matriz Hessiana da função Lagrangiana do FPOR-DM, que visa contornar os problemas relacionados à convergência global, evitando dessa forma que pontos de máximo ou de sela sejam encontrados, ao invés dos mínimos desejados. A inércia de uma matriz simétrica está associada ao número de autovalores positivos, negativos e nulos desta matriz. Assim, a estratégia de correção aqui proposta busca corrigir iterativamente a inércia da matriz Hessiana para uma quantidade específica de autovalores positivos, negativos e nulos, de modo que se garanta a obtenção de apenas pontos de mínimo para o FPOR-DM.

A abordagem proposta foi implementada no solver MATLAB (Matrix Laboratory) e testada utilizando os sistemas IEEE de 14, 30 e 57, apresentando resultados satisfatórios, que mostram a necessidade e eficiência da estratégia de correção de inércia e das novas direções de busca quando métodos baseados na terceira abordagem para a solução do FPOR-DM são utilizados.

2 O PROBLEMA DE FPOR-DM

2.1 Nomenclatura

Constantes:

g_{km} condutância série do ramo km que conecta as barras k e m ;

b_{km} susceptância série do ramo km que conecta as barras k e m ;
 b_{km}^{sh} susceptância *shunt* do ramo km que conecta as barras k e m ;
 b_k^{sh} susceptância *shunt* da barra k associada ao banco de capacitor/reator conectado a esta barra;
 P_{G_k} potência ativa gerada na barra k ;
 P_{C_k} potência ativa consumida na barra k ;
 Q_{G_k} potência reativa gerada na barra k ;
 Q_{G_k} potência reativa consumida na barra k ;
 $Q_{G_k}^{min}$ limite mínimo de injeção de potência reativa na barra k ;
 $Q_{G_k}^{max}$ limite máximo de injeção de potência reativa na barra k ;
 V_k^{min} limite mínimo da magnitude de tensão na barra k ;
 V_k^{max} limite máximo da magnitude de tensão na barra k .

Conjuntos:

L linhas de transmissão;
 T transformadores em-fase;
 Γ_{km} valores discretos que os taps de transformadores em-fase do ramo km podem assumir;
 Λ ramos, formado por transformadores e linhas;
 G barras com controle de magnitude de tensão;
 G' barras de geração do sistema, exceto a barra *slack*;
 C barras de carga;
 B todas as barras;
 Ω_k barras vizinhas à barra k .

Variáveis e Funções:

V_k magnitude da tensão na barra k ;
 V vetor das magnitudes de tensão em todas as barras;
 θ_k ângulo da tensão nas barras k ;
 θ_{km} diferença dos ângulos das tensões nas barras k e m ;
 θ vetor dos ângulos das tensões;
 t_{km} tap do transformador conectado às barras k e m ;
 t vetor dos taps dos transformadores;
 P_{km} fluxo de potência ativa no ramo km ;
 Q_{km} fluxo de potência reativa no ramo km ;
 Q_{km}^{sh} injeção de potência reativa do elemento *shunt* da barra k .

2.2 Formulação do problema de FPOR-DM

Seja o problema FPOR-DM:

$$\begin{aligned}
 \text{Min } & P(V, t, \theta) & (a) \\
 \text{s.a: } & \Delta P(V, t, \theta) = 0, \forall k \in G' \cup C & (b) \\
 & \Delta Q(V, t, \theta) = 0, \forall k \in C & (c) \\
 & Q_{G_k}^{min} \leq Q_{G_k}(V, t, \theta) \leq Q_{G_k}^{max}, \forall k \in G & (d) \quad (1) \\
 & V_k^{min} \leq V_k \leq V_k^{max}, \forall k \in B & (e) \\
 & t_{km} \in \Gamma_{km}, \forall (k, m) \in T & (f)
 \end{aligned}$$

Este trabalho adota as funções penalidade senoidal de Soler et al. (2013) dada em (2) e uma função penalidade polinomial de Silva (2016) dada em (3):

$$\Phi(t_{km}) : \begin{cases} \text{Senoidal: } \gamma \left[\text{sen} \left(\frac{t_{km}}{p} \pi + \alpha \right) \right]^2 & (2) \\ \text{Polinomial: } \gamma [(t_{km} - d_1)(t_{km} - d_2) \dots (t_{km} - d_n)]^2 & (3) \end{cases}$$

onde: α é uma constante: $\alpha \leq \pi$;

p é o espaçamento entre os valores do tap do transformador;

$\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ é o conjunto dos valores discretos.

$$\Phi(t_{km}) = \begin{cases} 0, & \text{se } t_{km} \in \Gamma_{km} \\ \delta > 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A função penalidade é adicionada à função objetivo do problema (1), resultando no problema FPOR-DM modificado (4) o qual é resolvido pelo método proposto de maneira iterativa:

$$\begin{aligned}
 \text{Min } & P(V, \theta, t) + \sum_{(k, m) \in T} \Phi(t_{km}) \\
 \text{s.a: } & \\
 & (1b) - (1f).
 \end{aligned} \quad (4)$$

Nota-se que ao introduzirmos a função $\Phi(t_{km})$ na função objetivo do problema, penalizamos os desvios dos taps dos valores discretos. O efeito que a função penalidade provoca na função objetivo é ilustrado na Figura 1, onde mostra uma função objetivo simples $f(x) = x^2$ e sua soma com a função penalidade $\Phi(x) = 0.01 \sin^2(x\pi/0.2)$, em que os valores discretos (mínimos locais) estão espaçados em 0.2. A função também insere vários máximos locais e, para resolver esse problema, propõe-se uma estratégia de correção de inércia que garante a obtenção de apenas mínimos locais.

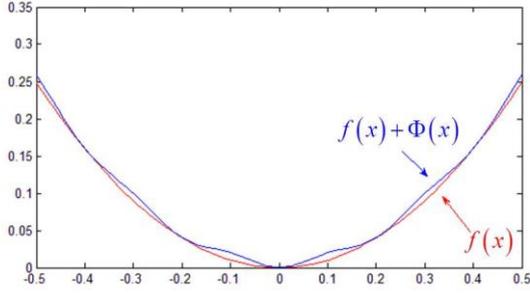


Figura 1: Efeito da função penalidade na função objetivo.

Na função penalidade, é necessário um ajuste na magnitude do parâmetro γ . Se adotarmos valores muito altos ou muito baixos para γ , o termo de penalidade se sobrepõe à função objetivo e não otimiza o critério esperado ou a penalização pode não ser efetiva para fazer com que os taps assumam valores discretos. Para garantir precisão na obtenção dos valores discretos, o FPOR-DM modificado (4) é resolvido em um processo iterativo em que os valores de γ são progressivamente aumentados com uma taxa linear com $\gamma^{k+1} = \kappa\gamma^k$, em que $\kappa > 0$ é uma constante. Um diagrama de blocos deste processo é detalhado em Soler et al. (2013). O método de solução proposto para resolver o problema de FPOR-DM é descrito a seguir.

3 MÉTODO DE PONTOS INTERIORES/ EXTERIORES COM CORREÇÃO DE INÉRCIA

Seja o problema (5):

$$\begin{aligned} \text{Min } & f(x) \\ \text{s.a } & \\ & g(x) = 0 \\ & h(x) + s = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

em que $x \in \mathbb{R}^n$ e $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ são funções de classe C^2 , com $n = 2 * \text{card}(B) + \text{card}(T)$, $m = \text{card}(B) - 1 + \text{card}(C)$ e $p = 2 * \text{card}(G)$ para o problema (4), em que $\text{card}(X)$ denota o número de elementos do conjunto X . Em (5) as restrições de desigualdade já estão transformadas em igualdades por meio de variáveis de folga $s \in \mathbb{R}_+^p$

As restrições de não negatividade são incluídas no problema modificado (6) por meio de uma função reescalamto não linear, neste caso, a função barreira logarítmica modificada:

$$\begin{aligned} \text{Min } & f(x) - \mu \sum_{i=1}^p \delta_i \ln(\mu^{-1} s_i + 1) \\ \text{s.a } & \end{aligned} \quad (6)$$

$$g(x) = 0$$

$$h(x) + s = 0,$$

em que $\mu > 0$ é o parâmetro da barreira logarítmica modificada e $\delta \in \mathbb{R}_+^p$ é o vetor de estimadores dos multiplicadores de Lagrange das restrições de desigualdade em (5). A função Lagrangiana barreira logarítmica modificada associada ao problema modificado (6) é dada conforme (7):

$$\begin{aligned} L_\mu(x, s, \lambda, \nu) = & f(x) - \mu \sum_{i=1}^p \delta_i \ln(\mu^{-1} s_i + 1) + \\ & \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x) + \sum_{i=1}^p \nu_i [h_i(x) + s_i] \end{aligned} \quad (7)$$

em que $\lambda \in \mathbb{R}^m$ e $\nu \in \mathbb{R}_+^p$ são os multiplicadores de Lagrange associados às restrições de igualdade e desigualdade de (6), respectivamente.

3.1 Sistema de direções

O método proposto consiste em calcular sucessivos pontos de estacionariedade da função (7), o que resulta em um sistema não linear, cujas equações são linearizadas no ponto x^k (associado à iteração k), resultando no sistema linear mostrado em (8), para detalhes da linearização ver (Silva, 2014):

$$\begin{bmatrix} K & 0 & Jg(x^k)^t & Jh(x^k)^t \\ 0 & \bar{S}_k^{-1} N^k & 0 & I_p \\ Jg(x^k) & 0 & 0 & 0 \\ Jh(x^k) & I_p & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx^k \\ ds^k \\ d\lambda^k \\ d\nu^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^k \\ \bar{S}_k^{-1} \pi^k \\ t^k \\ u^k \end{bmatrix}, \quad (8)$$

sendo que a matriz à esquerda de (8) é denominada Hessiana da função Lagrangiana (H^k); $K = \nabla_{xx}^2 L(x^k, s^k, \lambda^k, \nu^k)$; I_p é a matriz identidade de ordem p ; $N^k = \text{diag}(\nu^k)$, $Jg(x^k)$, $Jh(x^k)$ são as matrizes Jacobianas associadas às restrições de igualdade e desigualdade, respectivamente; $\bar{S}_k^{-1} = \text{diag}(1/(s_1 + \mu), \dots, 1/(s_m + \mu))$; e os resíduos são:

$$\begin{aligned}
m^k &= -\nabla f(x^k) - Jg(x^k)^t \lambda^k - Jh(x^k)^t v^k \\
\pi^k &= -\bar{S}_k v^k + \mu \delta^k - ds^k \circ d v^k \\
t^k &= -g(x^k) \\
u^k &= -h(x^k) - s^k,
\end{aligned} \tag{9}$$

em que se destaca o termo não linear $ds^k \circ d v^k$, o qual denota o produto de Hadamard. O FPOR-DM modificado dado em (6) é um problema não convexo, com múltiplos máximos e mínimos locais devido à função de penalidade. Como o sistema de direções (8) foi calculado com base nas condições de KKT, as quais são necessárias tanto para pontos de máximo quanto de mínimo, as direções de busca determinadas por meio da resolução desse sistema não garantem a busca de mínimos locais. Na seção a seguir é proposta uma estratégia de correção de inércia para a solução deste problema.

3.2 Correção de Inércia

Conforme descrito em Silva (2014), a inércia de uma matriz A é dada pela tripla ordenada $I(A) = (i_+, i_-, i_0)$, em que i_+, i_-, i_0 são os números de autovalores positivos, negativos e nulos da matriz A , respectivamente. De acordo com Nocedal and Wright (2006), uma direção é de descida para o sistema primal-dual (8) se a submatriz A^k (diagonal superior de H^k) é definida positiva no núcleo da submatriz B^k de restrições, o que ocorre quando a inércia da matriz H é dada por $I(H^k) = (n + p, m + p, 0)$, em que:

$$A^k = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & \bar{S}_k^{-1} N^k \end{bmatrix}; B^k = \begin{bmatrix} Jg(x^k) & 0 \\ Jh(x^k) & I_p \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Na estratégia de correção adotada neste trabalho, em que o sistema de direções é reduzido às direções primal dx^k e dual $d\lambda^k$, é necessário que a inércia da submatriz A^k seja $I(A^k) = (n, m, 0)$. Se a matriz A^k não possui a inércia desejada, é necessário fazer alterações nesta matriz para corrigir sua inércia. O esquema de correção aqui adotado é baseado em Nocedal and Wright (2006) e Silva (2014), e consiste em alterar por um fator $\beta > 0$ apenas a diagonal da submatriz K de A^k , uma vez que a submatriz $\bar{S}_k^{-1} N^k$ é sempre definida positiva, o que resulta na matriz corrigida \tilde{A}^k dada em (11):

$$\tilde{A}^k = \begin{bmatrix} K + \beta I_n & 0 \\ 0 & \bar{S}_k^{-1} N^k \end{bmatrix}. \tag{11}$$

O valor necessário de β que corrige a inércia para os valores desejados $I(A^k) = (n, m, 0)$ não é conhecido a priori, de modo que valores sucessivamente maiores devem ser testados, até que a inércia desejada seja obtida. Assim, o parâmetro β sofre aumentos sucessivos conforme (12):

$$\beta_{k+1} = \kappa_1 \beta_k, \tag{12}$$

em que $\kappa_1 > 1$ deve ser pré-especificado.

A importância desta etapa de correção de inércia na obtenção de soluções discretas ótimas é destacada por meio de exemplos de simulação nos resultados apresentados neste trabalho.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Tabela 1: SISTEMA IEEE 14 BARRAS

Correção de Inércia - Penalidade Senoidal

Com Correção			Sem Correção		
F. O.	It.	Taps	F. O.	It.	Taps
13.66	18	0.98	13.67	8	0.98
		0.96			0.97
		1.00			0.96

Tabela 2: SISTEMA IEEE 30 BARRAS

Penalidade Senoidal Penalidade Polinomial

Penalidade Senoidal			Penalidade Polinomial		
F. O.	It.	Taps	F. O.	It.	Taps
17.88	15	0.98	17.83	6	1.04
		0.96			0.94
		1.00			1.00
		0.96			0.96

Tabela 3: SISTEMA IEEE 57 BARRAS

Penalidade Senoidal Penalidade Polinomial

Penalidade Senoidal			Penalidade Polinomial		
F. O.	It.	Taps	F. O.	It.	Taps
25.45	44	0.98	25.04	19	0.98
		0.98			0.98
		1.04			1.00
		0.96			0.94
		0.96			0.94
		1.04			1.00
		0.96			0.98
		0.96			0.94
		0.96			0.96
		0.96			0.96
		0.96			0.96
		0.96			0.94
		0.96			0.94
		0.96			1.00
		0.98			0.98
		0.96			0.96

Parâmetro	Descrição	Valor
ε_1	Precisão do método	10^{-3}
ε_2	Precisão da penalidade	10^{-2}
μ	Valor inicial para barreira	0.005
τ	Taxa de atualização de μ	0.25
γ	Valor inicial para penalidade	10^{-5}
κ	Taxa de atualização de γ	1.3
α	Atraso na função penalidade	0.0
β	Valor inicial correção de inércia	0.01
κ_1	Taxa de atualização de β	1.5

O primeiro resultado mostrado na Tabela 1 é analisado com o sistema IEEE de 14 barras e tem como objetivo mostrar a necessidade da estratégia de correção de inércia. O caso é comparado com a estratégia de correção de inércia e sem a correção, utilizando a função penalidade senoidal para o tratamento das variáveis discretas.

Os resultados mostrados nas Tabelas 2 e 3 comparam as duas funções penalidades entre si, ambas com correção de inércia já que se mostrou necessária. Os resultados mostram que ambas as funções são eficientes com resultados satisfatórios. Notam-se vantagens em relação à função penalidade polinomial com menor quantidade de iterações e maior minimização da função objetivo.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, propõe-se uma técnica de solução para o problema de FPOR discreto misto (FPOR-DM), em que as variáveis discretas são tratadas por funções penalidade polinomial e os problemas penalizados são resolvidos por métodos de pontos interiores/exteriores. Mostrou-se que as funções penalidade polinomiais inserem artificialmente novos pontos de mínimo e máximo locais no FPOR-DM. Uma estratégia de correção de inércia é proposta para ser utilizada em conjunto com a função penalidade, a qual se mostrou eficiente para que o método proposto fosse capaz de encontrar apenas pontos de mínimos locais, evitando os pontos de máximo (que forneceram soluções discretas infactíveis). Nas simulações em que a estratégia de inércia foi utilizada, os taps ótimos de transformadores tiveram somente valores pertencentes ao conjunto discreto estabelecido, como esperado. Quando a estratégia não foi utilizada, valores infactíveis (não discretos) para os taps foram obtidos.

6 AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a UNESP – Faculdade de Engenharia - Bauru pelo apoio na publicação deste trabalho. E ao financiamento de Bolsa Mestrado e Doutorado - CAPES - 2016.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- CARPENTIER, J. Contribution a l'étude du dispatching économique. Bulletin de la Société Française des Électricien, 3(8), p.431-447, 1962.
- MEHROTRA, S. On the Implementation of a Primal-Dual Interior Point Method, SIAM Journal on Optimization, n. 2(4), p.575-601, 1992.
- NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J. Numerical Optimization. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. New York, 2006.
- PINHEIRO, R. B. N.; BALBO, A. R.; BAPTISTA, E. C.; NEPOMUCENO, L. Interior-exterior point method with global convergence strategy for solving the reactive optimal power flow problem. International Journal of Electrical Power & Energy Systems, 66, p.235-246, 2015.
- SILVA, D. N. Método primal-dual previsor-corretor de pontos interiores e exteriores com estratégias de correção de inércia e suavização hiperbólica aplicado ao problema de despacho econômico com ponto de carregamento de válvula e representação da transmissão. 261 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia de Bauru, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, UNESP, Bauru, 2014.
- SILVA, D. P. Funções Penalidade para o tratamento das variáveis discretas do problema de fluxo de potência ótimo reativo. 115 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia de Bauru, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, UNESP, Bauru, 2016.
- SOLER, E. M.; ASADA, E.; COSTA, G. Penalty-Based Nonlinear Solver for Optimal Reactive Power Dispatch With Discrete Controls. IEEE Transactions on Power Systems, 28(3), p.2174-2182, 2013.
- WÄCHTER, A.; BIEGLER, L. T. On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming. Mathematical Programming, 106(1), p.25-57, 2005.